N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 3825

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

CARVALLO Michel

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ALGEBRE A 2, 3 ET n VALEURS

soutenue le 22.12.1969 devant la Commission d'Examen

MM. R. FORTET Président

J.A. VILLE
J.L. DESTOUCHES Examinateurs

Synthèse d'un Système Séquentiel Ternaire

MICHEL CARVALLO
Laboratoire d'Econometrie, Université de Paris, Paris, France

Communicated by Robert Fortet

ABSTRACT

A three-valued system is used for finding an assignment for a ternary sequential circuit. The organs are ternary threshold elements and duality elements. The realization of a simple machine defined by its flow table illustrates the theory.

1. INTRODUCTION

L'algèbre de Boole est l'instrument mathématique approprié pour l'étude des systèmes à 2 états. L'algèbre de Post à 3 valeurs est nécessaire pour l'étude des systèmes à 3 états. On sait qu'une arithmétique à 3 symboles présente un avantage théorique pour le traitement des grands nombres sur calculatrice. Le présent article aborde le problème du codage en algèbre de Post des états internes d'une machine séquentielle ternaire.

2. DÉFINITIONS, NOTATIONS ET PROPRIÉTES FONDAMENTALES DE L'ALGÈBRE DE POST

Nous choisirons les symboles $1,0,-1$ pour caractériser les 3 états; les variables, paramètres et fonctions que nous envisagerons seront toujours définis dans l'ensemble $I = \{1,0,-1\}$.

Nous utiliserons la notation classique d'exponentiation [4]

$$x^u = 1 \text{ si et seulement si } x = u$$
$$x^u = -1 \text{ si et seulement si } x \neq u$$
$$a \dotplus b = \max\{a, b\}$$
$$a.b = \min\{a, b\}$$

On sait que x s'écrit sous la forme canonique $x = x^1 \dotplus 0x^0$. [3]

 Copyright © 1969 by American Elsevier Publishing Company, Inc.

Nous considèrerons deux opérateurs fondamentaux qui définissent un système semi-fonctionnel: [1]

(1) l'opérateur de dualité associe à $x = x^1 \dot{+} Ox^0$, son dual:

$$\delta x = x^{-1} \dot{+} Ox^0 \qquad (\delta 0 = 0, \delta 1 = -1, \delta(-1) = 1);$$

(2) l'opérateur de majorité à 3 arguments est défini par:

$$[x, y, z] = \begin{cases} 1 \text{ si } x + y + z \geqslant 1, \\ 0 \text{ si } x + y + z = 0 \\ -1 \text{ si } x + y + z \leqslant -1. \end{cases} \qquad (+ \text{ arithmétique}),$$

UNIV. LEIDEN BIBL.

3. DÉFINITION D'UN SYSTÈME SÉQUENTIEL TERNAIRE

Un système séquentiel ternaire Σ est défini à l'instant t par la donnée du quintuplet (I, O, E, f, g):

I représente une séquence de variables de Post, variables d'entrée (input): $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

O représente une séquence de variables de Post, variables de sortie (output): $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

E représente l'état interne du système Σ, chaque état pourra être repéré par une lettre $(A, B, C \ldots s \ldots)$.

f est une application de l'ensemble produit $I \times E$ dans O.

g est une application de l'ensemble produit $I \times E$ dans E.

Le système Σ évolue au cours du temps, la fonction g définit cette évolution:

Σ étant dans l'état $E(t)$ à l'instant t se transforme sous l'effet de l'entrée $I(t)$ pour prendre l'état $E(t+1)$ au tempts $t+1$. Nous considèrerons que l'état du système Σ est défini aux temps t, $t+1$, $t+2$, ... mais nous ne nous interesserons pas à l'état de Σ pour des instants intermédiaires.

Posons $\qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$
$\qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_m).$

La séquence d'entrée est susceptible de prendre 3^n formes, une forme déterminée sera notée $x^l = (x_1{}^l, x_2{}^l, \ldots x_n{}^l)$, l est un indice et non un exposant Postien. Un état interne à l'instant t est désigné par une lettre s, un état interne déterminé par s_h, un état interne à l'instant $t+1$ par S; l'état interne à l'instant $t+1$ provenant de l'état s_h à l'instant t sous l'effet de l'entrée x^l par $S_h{}^l$ et la sortie à l'instant t provenant de s_h et x^l par $z_h{}^l = (z^l_{h1}, z^l_{h2}, \ldots, z^l_{hm})$.

Considérons les applications f et g et les fonctions correspondantes désignées encore par f et g, nous écrirons:

$$I \times E - f \rightarrow O \text{ ou } f(x, s) = z, \text{ en particulier } z_h{}^l = f(x^l, s_h),$$
$$I \times E - g \rightarrow E \text{ ou } g(x, s) = S, \text{ en particulier } S_h{}^l = g(x^l, s_h).$$

4. CODAGE DES ÉTATS INTERNES

Soit un système Σ susceptible de prendre un nombre fini N d'états $(1 \leqslant h \leqslant N)$.

On peut alors coder ces états internes à l'aide de p paramètres Postiens (p, plus petit entier tel que $3^p \geqslant N$): A un état s à l'instant t, on associe la suite de Post $y_1, y_2, \ldots, y_p$. On pose $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$. De même à un état S à l'instant $t+1$, on associe la suite $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_p)$ [4].

Ecrivons
$$s_h \leftrightarrow y_h = (y_{h1}, y_{h2}, \ldots, y_{hp}),$$
$$S_h{}^l \leftrightarrow Y_h{}^l = (Y_{h1}^l, Y_{h2}^l, \ldots, Y_{hp}^l).$$

Cette correspondance caractérise le codage adopté.

Aux applications f et g sont alors associées des fonctions de Post, notées f_i et g_j:

$$z_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{1}$$

$$Y_j = g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{2}$$

Les équations (2) sont les *équations d'excitation.*

Les expressions f_i et g_j seront plus ou moins compliquées selon le codage $s_h \leftrightarrow y_h$ adopté. Pour $N = 3^p$, on a *a priori* $N!$ codages différents possibles. Il est important de choisir un codage donnant lieu à des expressions simples de f_i et de g_j ou mieux à des réalisations électroniques économiques [2].

Nous nous efforcerons par exemple dans ce que suit de réaliser un système à l'aide de deux seuls types d'organes, les organes de dualité et de majorité [3].

5. MATRICE D'ADRESSES, MATRICE D'EXCITATION

La matrice $A(N,n)$ dont l'élément en position (h,l) est l'état $S_h{}^l$, est la *matrice d'adresses* du système. On peut compléter A par la donnée en position (h,l) de la sortie $z_h{}^l$. On obtient ainsi le tableau suivant qui définit le système séquentiel:

$s \backslash x$	$x^1 x^2 \ldots x^l \ldots x^r$
s_1	·
s_2	·
s_3	·
s_h	$\ldots\ s_h{}^l z_h{}^l$
⋮	
S_N	

matrice d'adresses et de sorties

Si S_h^l et s_h sont deux états identiques ($S_h^l = s_h$), on dit que l'état S_h^l est *stable* pour l'entrée x^l, cet état reste en effet inchangé au cours du temps, tant que la séquence d'entrée reste la même. Si la matrice d'adresse ne présente pas d'indéterminations (toutes les valeurs de S_h^l, z_h^l sont spécifiées) l'état du système et la sortie sont connus à tout instant. Dans le cas contraire le système est dit *incomplètement spécifié.* [5]

Supposons que l'on ait codé les états internes du système Σ, la *matrice d'excitation* se déduit de la matrice d'adresses (sans les sorties) en remplaçant les états et les entrées par leurs expressions Postiennes; on obtient:

$s \diagdown x$	$x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1$ $x_1^l x_2^l \dots x_n^l$ $x_1^r x_2^r \dots x_n^r$
$y_{11} y_{12} \cdots y_{1p}$ $y_{h1} y_{h2} \cdots y_{hp}$ $y_{N1} y_{N2} \cdots y_{Np}$	$Y_{h1}^l \; Y_{h2}^l \dots Y_{hp}^l$

matrice d'excitation

Dans ce tableau les x_i^l, y_{hj}, Y_{hj}^l, sont des nombres de Post déterminés $(1,0,-1)$.

6. DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS D'EXCITATION

A chaque j (voir la matrice d'excitation) associons les couples d'indices $u = (h, l)$ tels que $Y_{hj}^l = 1$, $v = (h, l)$ tels que $Y_{hj}^l = 0$, $w = (h, l)$ tels que Y_{hj}^l non spécifié et formons les produits fondamentaux V_u, D_v, I_w:

$$V_{hj}^l = V_u = x_1^{x_1 l} x_2^{x_2 l} \dots x_n^{x_n l} y_1^{y_{h1}} y_2^{y_{h2}} \dots y_p^{y_{hp}}; \text{ on a: } (V_u = 1 \rightarrow Y_{hj}^l = 1);$$

$$D_{hj}^l = D_v = x_1^{x_1 l} x_2^{x_2 l} \dots x_n^{x_n l} y_1^{y_{h1}} y_2^{y_{h2}} \dots y_p^{y_{hp}}; \text{ on a: } (D_v = 1 \rightarrow Y_{hj}^l = 0);$$

$$I_{hj}^l = I_w = x_1^{x_1 l} x_2^{x_2 l} \dots x_n^{x_n l} y_1^{y_{h1}} y_2^{y_{h2}} \dots y_p^{y_{hp}}; \text{ on a: } (I_w = 1 \rightarrow Y_{hj}^l \text{ indéterminé}).$$

Les x_i^l, y_{hj} sont des exposants Postiens. Aux produits V_u, D_v, I_w, sont associés les sommets "Vrais", "Douteux" et "Indéterminés" du cube de Post à $n+p$ dimensions, pour la fonction Y_j. Les équations d'excitation sont de la forme:

$$Y_j = \dot{\sum_u} V_u \dot{+} 0 . \dot{\sum_v} D_v \dot{+} \dot{\sum_w} \mu_w I_w. \tag{3}$$

On choisira les μ_w(1, 0 ou -1) de façon à obtenir par les formules (3) des expressions simples à réaliser.

7. PARTITIONS SUBSTITUTIVES DE E

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$, des ensembles d'états internes de E. On dit que l'ensemble $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$ est une partition substitutive de E si $\cap\, \alpha_i = \phi$, $\cup\, \alpha_i = E$ et si tous les états consécutifs aux états d'un même ensemble α_i de P sous l'effet d'une même entrée appartiennent à un même ensemble α_j de P. La connaissance de telles partitions peut aider à obtenir un codage interne [5]: Si P contient t ensembles α_i ou "blocs", on choisira u paramètres Postiens $y_1, y_2 \ldots y_u$ (u, plus petit entier tel que $3^u \geqslant t$) pour coder ces blocs.

8. EXEMPLE: SYNTHÈSE D'UN SYSTÈME SÉQUENTIEL TERNAIRE

Considérons le système séquentiel ternaire défini par la matrice d'adresses et de sorties suivante. (—1 est noté—dans le tableau). L'état P a été séparé, c'est un état instable qui ne peut être obtenu à partir d'un état précédent. P peut seulement être imposé à l'instant initial. z est indépendant de x.

TABLEAU I

MATRICE D'ADRESSES ET DE SORTIES

x	1	0	—	z
s	S	S	S	
A	A	A	A	1
B	A	A	B	0
C	A	B	C	–
D	D	D	D	1
E	D	D	E	1
F	D	E	F	0
G	G	G	G	1
H	G	G	H	1
I	G	H	I	1
J	G	J	J	1
K	G	J	K	1
L	G	K	L	0
M	G	J	M	1
N	G	J	N	0
O	G	K	O	–
P	G	K	O	–

Le système peut prendre 16 états $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P$. Nous pourrons donc les coder à l'aide de 3 paramètres Postiens y_1, y_2, y_3 ($3^2 < 16 < 3^3$).

Partitions substitutives

Considérons les deux partitions substitutives P_1 et P_2 ci-dessous, des 15 premiers états.

(1) $P_1 = (ABC, DEF, GHI, JKL, MNO)$.

Cette partition nous invite à coder les 5 blocs qu'elle comporte à l'aide des 2 paramètres postiens y_1 et y_2 ($3^1 < 5 < 3^2$). Nous prendrons:

pour A, B, C: $y_1 = 1, y_2 = 1$;
pour D, E, F: $y_1 = 1, y_2 = 0$;
pour G, H, I: $y_1 = 1, y_2 = -1$;
pour J, K, L: $y_1 = 0, y_2 = -1$;
pour M, N, O: $y_1 = -1, y_2 = -1$.

(2) $P_2 = (ADGJM, BEHKN, CFILO)$.

Cette partition nous invite à coder les 3 blocs qu'elle comporte à l'aide du paramètre postien y_3 ($3^1 = 3$). Nous prendrons:

pour A, D, G, J, M: $y_3 = 1$;
pour B, E, H, K, N: $y_3 = 0$;
pour C, F, I, L, O: $y_3 = -1$.

Du tableau I et de ce codage, nous déduisons la matrice d'excitation (tableau II). On pourra prendre pour P un code non utilisé: $y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = -1$.

TABLEAU II

MATRICE D'EXCITATION

x			1			0			–		
y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	–	1	1	1	1	1	0	1	1	–
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	–	1	0	1	1	0	0	1	0	–
1	–	1	1	–	1	1	–	1	1	–	1
1	–	0	1	–	1	1	–	1	1	–	0
1	–	–	1	–	1	1	–	0	1	–	–
0	–	1	1	–	1	0	–	1	0	–	1
0	–	0	1	–	1	0	–	1	0	–	0
0	–	–	1	–	1	0	–	0	0	–	–
–	–	1	1	–	1	0	–	1	–	–	1
–	–	0	1	–	1	0	–	1	–	–	0
–	–	–	1	–	1	0	–	0	–	–	–
–	0	–	1	–	1	0	–	0	–	–	–

Nous avons ainsi associé à chacun des 16 états, un triplet $y_1 y_2 y_3$; 11 valeurs du triplet n'ont pas été utilisées, nous leur associons $3 \times 11 \times 3$ codes

$$Y_{hj}^{l} \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots 11 ; l = -1, 0, 1 \\ j = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

conformément au tableau III.

Ces valeurs ont été choisies de façon que par application de la formule (3), où les μ_w correspondant aux I_w donnés par III sont égaux aux Y_{hj}^{l} du tableau III, les équations d'excitation soient simples. (Les I_w sont les 33 produits fondamentaux à 4 variables $y_1 y_2 y_3 x$.)

Le choix des éléments du tableau III est guidé par le soin de séparer les variables y_1, y_2 d'une part, y_3 d'autre part et de former le plus de consensus possible avec le tableau II: on cherche successivement les colonnes de III relatives à Y_1, Y_2, Y_3.

TABLEAU III

MATRICE DES I_w INDÉTERMINÉS POUR LESQUELS $\mu_w = Y_{hj}^{l}$

x			1			0			−1		
y_1	y_2	y_3									
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	–	1	0	1	0	0	0	0	0	–
0	0	1	1	–	1	0	–	1	0	–	1
0	0	0	1	–	1	0	–	1	0	–	0
0	0	–	1	–	1	0	–	0	0	–	–
–	1	1	1	–	1	0	–	1	–	–	1
–	1	0	1	–	1	0	–	1	–	–	0
–	1	–	1	–	1	0	–	0	–	–	–
–	0	1	1	–	1	0	–	1	–	–	1
–	0	0	1	–	1	0	–	1	–	–	0
–	0	–	1	–	1	0	–	0	–	–	–

Le code de P a été ajouté au tableau III pour faciliter le calcul à vue des Y.

Equations d'excitation

La formule (3) donne alors, après simplification par la méthode de Quine adaptée à l'algèbre de Post [3], les équations d'excitation:

$$Y_1 = x \dot{+} y_1,$$
$$Y_2 = y_1^{1} y_2^{1} \dot{+} 0(y_1^{1} y_2^{0} \dot{+} y_1^{0} y_2^{1}),$$
$$Y_3 = x^{1} \dot{+} y_3^{1} \dot{+} x^{0} y_3^{0} + 0(x^{0} + y_3^{0}).$$

Nous pourrons donc réaliser le système à l'aide de deux systèmes fonctionnant en parallèle, le premier correspond aux états internes codés par y_1 et y_2, c'est-à-dire à la partition P_1 et le second aux états internes codés par y_3, c'est-à-dire à la partition P_2. (Si l'état P n'avait pas fait partie de la matrice d'adresses donnée, on eût choisi $Y_2 = y_2$ d'où trois systèmes simples fonctionnant en parallèle.)

Afin d'utiliser les opérateurs dualité et majorité seuls, nous écrirons les équations d'excitation sous la forme:

$$Y_1 = [[\delta x, y_1, -1], x, 1],$$
$$Y_2 = [y_1, y_2, -1],$$
$$Y_3 = [x, y_3, 1].$$

Sortie

L'expression disjonctive de la sortie z est donnée par les tableaux I et II $z(x, y_1, y_2, y_3)$ mais il est plus simple de remarquer que z s'obtient à partir de y_1, y_2, y_3 par la formule

$$z = [y_1, \delta y_2, y_3].$$

Schéma du système

Le système défini par le tableau I peut être schématisé par la figure 1: chaque variable d'état y_i est une sortie d'un élément à retard; le système reçoit deux entrées x (variable) et 1 (constante).

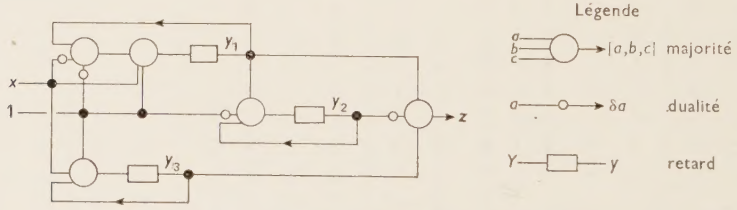

FIG. 1. Système séquentiel ternaire.

RÉFÉRENCES

1 M. Carvallo, *Monographie des Treillis et Algèbre de Boole*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
2 M. Carvallo, *Principes et Applications de l'Analyse Booléennes*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
3 M. Carvallo, *Logique à 3 valeurs. Logique à seuil*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
4 M. Carvallo, Sur la Résolution des Équations de Post, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Nov. 13, 1967.
5 J. Kuntzmann et P. Naslin, Algèbre de Boole et Machines logiques, Dunod, Paris, 1967.

Received December 12, 1968